Полтавська область 2016-2017
Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
Секції: математики, прикладної математики, математичного моделювання

9 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність $|ax| < x$, де a – параметр.

Розв'язання.

1. Зрозуміло, що $x > 0$, тому $-x < ax < x \Leftrightarrow -1 < a < 1$. Відповідь: якщо $-1 < a < 1$, то $x > 0$, в інших випадках розв'язків немає.

2. Порівняти числа $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ та $\sqrt{17}$.

Розв'язання.

2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,?\,\sqrt{17}-1 \Leftrightarrow 5+2\sqrt{6}\,?\,18-2\sqrt{17} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{6}+\sqrt{17}\right)?13 \Leftrightarrow 4\left(23+2\sqrt{102}\right)?169 \Leftrightarrow 8\sqrt{102}\,?\,77.$

Але $8\sqrt{102} > 80 > 77 \Rightarrow 1+\sqrt{2}+\sqrt{3} > \sqrt{17}.$

3. Дві пляшки однакового об'єму заповнені водою з соком. Відношення об'єму води до соку відповідно дорівнюють 2:1 та 4:3. Знайти відношення об'єму води до соку, якщо злити вміст обох пляшок в одну велику пляшку.

Розв'язання.

3. В першій пляшці вода становить $\frac{2}{3}$ всього об'єму, а в другій – $\frac{4}{7}$. Тому у великій пляшці вода становитиме $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)=\frac{13}{21}$ всієї рідини. Отже, відношення об'ємів води і соку дорівнює $13:8$.

II рівень

4. Якщо гіпотенузи і висоти, проведені до них, двох прямокутних трикутників відповідно рівні, то ці трикутники рівні. Довести.

Розв'язання.

4. Нехай $a, b\,(a \ge b)$; $a', b'\,(a' \ge b')$ – катети цих трикутників, c – гіпотенуза, h – висота. Тоді за умовою $a^2+b^2=a'^2+b'^2=c^2, ab=a'b'=ch.$ Звідси $(a\pm b)^2=(a'\pm b')^2=c^2\pm 2ch.$ Отже, $.a\pm b=a'\pm b' \Rightarrow a=a', b=b'$, трикутники рівні.

5. Довести, що для будь-якого натурального n $(n \ge 2)$ число $\left(2^2-1\right)\left(3^2-1\right)...\left(n^2-1\right)$ ділиться на $\left((n-1)!\right)^2$, де $k!=1\cdot 2\cdot ...\cdot k$ – факторіал.

Розв'язання.

5.. $\left(2^2-1\right)\left(3^2-1\right)\left(4^2-1\right)...\left(n^2-1\right)=(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)...(n-1)(n+1)=$

$=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(n-2)n(n-1)(n+1)=1\cdot2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot...\cdot(n-1)^2n(n+1)=\left((n-1)!\right)^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$

Очевидно, що $\frac{n(n+1)}{2}$ – ціле, з чого і випливає подільність.

III рівень

6. У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC вибрано точку M так, що $AM=2MC$. Відомо, що точка M лежить на серединному перпендикулярі до гіпотенузи AB. Знайти кути трикутника.

Розв'язання.

6. Нехай O – середина гіпотенузи, $AB=c, BC=a, CA=b$. Тоді $AO=\frac{1}{2}c, AM=\frac{2}{3}b.$ Крім того $\triangle AMO, \triangle ABC$ – подібні. Тоді $\frac{AM}{AB}=\frac{AO}{AC}\Rightarrow\frac{\frac{2}{3}b}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{b}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle A=60^{\circ}, \angle B=30^{\circ}.$

7. Якою може бути найбільша кількість цифр числа, якщо кожна пара його сусідніх цифр утворює двозначне число, яке є точним квадратом (усі цифри відмінні від 0)?

Розв'язання.

7. Квадрат цілого числа може закінчуватись або на 1, або на 4, або на 5, або на 6, або на 9. З цих цифр можна утворити такі двозначні точні квадрати: 16, 49, 64. Маємо максимальну групу з указаних цифр, яка задовольняє умові задачі – 1649. Шукане число дорівнює 81649 і має 5 цифр.

10 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}<2.$

Розв'язання.

1. ОДЗ: $-1\le x\le 1.$ Після піднесення обох частин нерівності до квадрату одержимо $(1-x)+2\sqrt{1-x^2}+(1+x)<4\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}<1\Leftrightarrow x\neq 0.$

Відповідь: $x\in[-1,0)\cup(0,1].$

2. Знайти множину значень функції $y=\frac{x}{x^2+|x|+1}.$

Розв'язання.

2. При $x=0$ $y=0.$ Нехай $x>0,$ тоді $y=\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}},$ але $x+\frac{1}{x}\ge 2\Rightarrow 0<y\le\frac{1}{3}.$

Враховуючи непарність заданої функції, остаточно маємо $y\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right].$

3. Знайти суму висот трикутника зі сторонами 5, 6 та 7.

Розв'язання.

3. За формулою Герона знаходимо площу трикутника $S=6\sqrt{6}.$ Тоді шукана сума висот дорівнює $2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=12\sqrt{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)=\frac{214\sqrt{6}}{35}.$

II рівень

4. При якому значенні параметра a рівняння $|x+2|+|x-2|=|x^2+a|$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання.
4. Якщо $x=x_0$ – розв'язок рівняння, то $x=-x_0$ – теж розв'язок рівняння, тому рівняння має тільки нульовий розв'язок. Підставивши $x=0$, одержимо $a=\pm 4$. Якщо $a=-4$, то рівняння має три розв'язки. Нехай $a=4$, тоді $|x+2|+|x-2|=x^2+4$. Залишається розкрити модулі. В цьому випадку маємо єдиний розв'язок $x=0$. Відповідь: $a=4$.

5. В трикутнику ABC проведено бісектриси AA', BB'. Відомо, що пряма $A'B'$ паралельна AB. Довести, що трикутник рівнобедрений.
Розв'язання.
5. $\angle B'BA=\angle B'BC, \angle B'BA=\angle A'B'B \Rightarrow \angle A'BB=\angle A'B'B \Rightarrow A'B=A'B'$. Аналогічно $A'B'=AB'$. Маємо рівнобічну трапецію $AB'A'B$, кути при основі якої рівні. Отже, трикутник рівнобедрений.

III рівень

6. Довести нерівність $\frac{1}{a+b}+\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}\ge\frac{3}{2}$, де $a>0, b>0$.
Розв'язання.
6. Нехай $x=b+1, y=a+1, z=a+b \Rightarrow a=\frac{1}{2}(-x+y+z), b=\frac{1}{2}(x-y+z), 1=\frac{1}{2}(x+y-z)$. Тоді задана нерівність перепишеться так $\frac{1}{2}\left(\frac{x+y-z}{z}+\frac{-x+y+z}{x}+\frac{x-y+z}{y}\right)\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow$ $\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)+\left(-1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\ge 3\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\ge 6$. Остання нерівність є істиною, бо сума взаємно обернених додатних чисел не менше 2.
7. В опуклому чотирикутнику $ABCD$: $AB=AC, \angle BAD=80^\circ, \angle ABC=75^\circ, \angle ADC=65^\circ$. Знайти $\angle BDC$.
Розв'язання.
7.. $AB=AC\Rightarrow\angle ACB=\angle ABC=75^\circ\Rightarrow\angle BAC=30^\circ\Rightarrow\angle CAD=50^\circ\Rightarrow\angle ACD=65^\circ=\angle ADC\Rightarrow$
$\Rightarrow AC=AD$. Маємо $AB=AC=AD$. Розглянемо коло радіуса AB з центром в точці A. $\angle BDC$ – вписаний в це коло, тому $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BAC=15^\circ$.

11 клас

I рівень

1.Розв'язати рівняння $\log_x(x+6)+\log_{x+6}x=\frac{10}{3}$.
Розв'язання.
1. ОДЗ: $x>0, x\ne 1$. Нехай $t=\log_x(x+6)\Rightarrow\log_{x+6}x=\frac{1}{t}$. Знаходимо $t=3, t=\frac{1}{3}$. В першому випадку $x+6=x^3\Rightarrow x=2$. В другому випадку рівняння $(x+6)^3=x$ не має додатних коренів. Відповідь: $x=2$.

2. Порівняти числа $\cos 3$ та $\cos 4$.
Розв'язання.

2. За формулами зведення $\cos 3 = -\cos(\pi - 3), \cos 4 = -\cos(4 - \pi)$. Але $0 < \pi - 3 < 4 - \pi < \pi \Rightarrow$ $\cos(\pi - 3) > \cos(4 - \pi) \Rightarrow \cos 3 < \cos 4.$

3. Точки *A* та *B* лежать по різні сторони від заданої площини. Відстані від цих точок до площини дорівнюють 3 і 5. Знайти відстань від середини відрізка *AB* до площини.
Розв'язання.
3. Шукана відстань дорівнює (5-3):2=1.

II рівень

4. При яких значеннях параметрів b, c рівняння $\sin^2 x + b \sin x + c = 0$ має єдиний розв'язок на відрізку $x \in [0, \pi]$?

Розв'язання.
4. Якщо $x = \alpha \in [0, \pi]$ – розв'язок рівняння, то $x = \pi - \alpha \in [0, \pi]$ – теж розв'язок рівняння, тому рівняння має тільки розв'язок $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = 1.$ Тоді $1 + b + c = 0 \Rightarrow \sin^2 x + b \sin x - b - 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(\sin x + b + 1) = 0.$ Рівняння $\sin x + b + 1 = 0$ не повинно мати розв'язків при $x = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow \sin x \notin [0,1) \Rightarrow -b - 1 \notin [0,1).$ Відповідь: $b \in (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty), c = -b - 1.$

5. Знайти об'єм трикутної піраміди *SABC*, якщо задано довжини її ребер $SA = 12, SB = 5, SC = 9, AB = 13, AC = 15, BC = 6.$
Розв'язання.
5. Зрозуміло $SA^2 + SB^2 = AB^2, SA^2 + SC^2 = AC^2 \Rightarrow \angle ASB = \angle ASC = 90^\circ \Rightarrow$ AS – перпендикуляр до $SBC \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{\triangle SBC} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 12 = 40\sqrt{2}.$

III рівень

6. Довести нерівність $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{1}{4}$, де $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1.$

Розв'язання.
6. За нерівністю Коші $\frac{16x^2}{1+y} + (1+y) \geq 8x, \frac{16y^2}{1+z} + (1+z) \geq 8y, \frac{16z^2}{1+x} + (1+x) \geq 8z.$ Залишається додати ці три нерівності.

7. Знайти всі прості числа p, що для деякого натурального n степінь p^n є десятицифровим числом, усі цифри якого різні.
Розв'язання.
7. Сума цифр десятицифрового числа, всі цифри якого різні, дорівнює 45, отже степінь p^n ділиться на 3. Тому задане просте число може бути лише 3. Далі безпосередньо перевіряємо, що десятицифровими степенями трійки будуть тільки 3^{19} та 3^{20}, які не задовольняють умові задачі. Шуканих простих чисел не існує.